

УДК 517.5

Р.Р. Салимов (Институт математики НАН Украины),

Е.А. Севостьянов (Житомирский государственный университет им. И. Франко)

Р.Р. Салімов (Інститут математики НАН України),

Є.О. Севостьянов (Житомирський державний університет ім. І. Франко)

R.R. Salimov (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine),

E.A. Sevost'yanov (Zhitomir State University of I. Franko)

О некоторых локальных свойствах пространственных обобщённых квази-изометрий

Про деякі локальні властивості просторових узагальнених квазіізометрій

On some local properties of space generalized quasiisometries

Получена оценка сверху для меры образа шара в некотором классе отображений, являющихся обобщением пространственных квазиизометрий с ветвлением. Как следствие, для указанных отображений получен аналог классической леммы Шварца при некотором дополнительном ограничении интегрального характера. Полученные результаты имеют соответствующие приложения в классах Соболева и Орлича–Соболева.

Отримано оцінку зверху для міри образу кулі в деякому класі відображень, що є узагальненням просторових квазіізометрій з розгалуженням. Як наслідок, для вказаних відображень отримано аналог класичної леми Шварца за деяким додатковим обмеженням інтегрального характеру. Отримані результати мають відповідні застосування в класах Соболева і Орліча–Соболева.

For some class of mappings, which are generalization of space quasiisometries, an upper estimate for a measure of image of a ball is obtained. As consequence, it is obtained one analog of Schwartz lemma for mappings mentioned above. Results of the paper are applicable in Sobolev and Orlicz–Sobolev classes.

1. Введение. Здесь и далее D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, m – мера Лебега в \mathbb{R}^n , отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть непрерывное соответствие $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$. Напомним, что *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого, либо полуоткрытого интервала одного из видов: (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$) в \mathbb{R}^n , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, напр., в [1, разд. 1–6, гл. I]. Всяду далее

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\},$$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \quad \mathbb{B}^n := B(0, 1), \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1),$$

Ω_n – объём единичного шара \mathbb{B}^n в \mathbb{R}^n , а ω_{n-1} – площадь единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} в \mathbb{R}^n . Для произвольных множеств $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ через $\Gamma(E, F, D)$ в дальнейшем обозначается семейство всевозможных кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих E и F в D (т.е., $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$). Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в \mathbb{R}^n , если $\int \rho(x) |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Пусть $p \geq 1$, тогда p – *модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^p(x) \, dm(x). \quad (1)$$

Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, может быть положено неравенство

$$M_n(f(\Gamma)) \leq K M_n(\Gamma), \quad (2)$$

которое должно выполняться для произвольного семейства Γ кривых γ в области D (см., напр., [1, разд. 13, гл. 2]). Пусть теперь $x_0 \in D$, $r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – некоторая заданная измеримая по Лебегу функция. Обозначим через $S_i := S(x_0, r_i)$, где $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Предположим, что отображение f вместо соотношения (2) удовлетворяет условию

$$M_p(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) \, dm(x) \quad (3)$$

для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1, \quad (4)$$

где $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$ – сферическое кольцо с центром в точке x_0 радиусов r_1 и r_2 . Тогда будем говорить, что f является *кольцевым* (p, Q) -отображением в точке $x_0 \in D$. Отметим, что неравенство (3) соответствует условию

(2) при $p = n$ и $Q(x) \leq K$, а при $Q \leq K$ и произвольном p – неравенству

$$M_p(f(\Gamma)) \leq K M_p(\Gamma), \quad (5)$$

выполненному для произвольного семейства Γ кривых γ в области D .

Целью настоящей заметки является установление некоторых локальных свойств отображений, удовлетворяющих соотношению (3) и имеющих важные приложения к классам Соболева и Орлича–Соболева (см. [2] и [3]). Здесь нас интересует главным образом случай неограниченных Q , поскольку соответствующие исследования «ограниченного» случая были проведены другим авторами ранее (см. [4] и [5]).

В частности, при дополнительном предположении, что f в (5) является гомеоморфизмом и $p \in (n-1, n)$ известным математиком Ф. Герингом установлено, что f является *локально квазиизометричным*, другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq C, \quad (6)$$

см., напр., [4, теорема 2]. При $p = n$ свойство квазиизометричности указанных отображений, к сожалению, утрачивается, однако, японским математиком К. Икома в этом случае был получен следующий аналог леммы Шварца для аналитических функций: предположим, что $f : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}^3$ квазиконформное отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$, преобразующее каждый радиус единичного шара в кривую, ортогональную к образу сферы $|x| = r$ при всех $r > 0$, $r < 1$. Тогда

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{(\frac{1}{K})^{1/2}}} \leq 1, \quad (7)$$

где K – постоянная квазиконформности, определяемая из неравенств $(1/K) M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K M(\Gamma)$ (см., напр., [5, теорема 2]). В настоящей работе нами устанавливается справедливость следующего результата.

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$, $1 < p < n$, $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ – открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение и $f(0) = 0$. Предположим, что $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ – локально интегрируемая функция в \mathbb{B}^n , удовлетворяющая условию

$$Q_0 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(0, \varepsilon)} Q(x) dm(x) < \infty.$$

Тогда имеет место оценка:

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq c_0 Q_0^{\frac{1}{n-p}}, \quad (8)$$

где c_0 – некоторая положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n и p .

2. Вспомогательные сведения. Следуя работе [6, раздел 5], пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором* в \mathbb{R}^n . Говорят также, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение и $E = (A, C)$ – конденсатор в D , то $f(E) := (f(A), f(C))$ также является конденсатором в $f(D)$.

Говорят, что функция $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A , если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A . Функция $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL , если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси. Обозначим через $C_0(A)$ множество всех непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL . Также обозначим $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$. При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p E = \text{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^p dm(x)$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора E . Ёмкости в контексте теории отображений достаточно хорошо отражены в монографии [7]. Известно, что при $p \geq 1$

$$\text{cap}_p E \geq \frac{(\inf m_{n-1} \sigma)^p}{[m(A \setminus C)]^{p-1}}, \quad (9)$$

где $m_{n-1} \sigma$ – $(n-1)$ -мерная мера Лебега C^∞ -многообразия σ , являющегося границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U , содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием \bar{U} в A , а точная нижняя грань берется по всем таким σ , см. [8, предложение 5]. При $1 < p < n$

$$\text{cap}_p E \geq n \Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}} \quad (10)$$

где Ω_n – объем единичного шара в \mathbb{R}^n , см., напр., [9, неравенство (8.9)].

Следующее утверждение имеет важное значение для доказательства дальнейших результатов (см. [10, предложение 10.2 и замечание 10.8, гл. II]).

Предложение 1. Пусть $E = (A, C)$ – произвольный конденсатор в \mathbb{R}^n , и Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma : [a, b] \rightarrow A$, таких что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда для произвольного $p \geq 1$ имеет место равенство:

$$\text{cap}_p E = M_p(\Gamma_E). \quad (11)$$

Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Тогда положим

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{H}^{n-1},$$

где \mathcal{H}^{n-1} – $(n-1)$ -мерная мера Хаусдорфа. Следующая лемма позволяет установить для отображения f выполнение свойств (3)–(4) в точке x_0 без обременительной проверки бесконечного числа неравенств в (3) (см. также [11, лемма 1]). Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$.

Лемма 1. Пусть $n \geq 2$, $p \geq 1$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение в точке $x_0 \in D$ и E – конденсатор вида $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)} \right)$, $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$. Полагаем

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}. \quad (12)$$

Тогда для конденсатора $f(E) = \left(f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}) \right)$ выполнено соотношение

$$\text{cap}_p f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}. \quad (13)$$

Доказательство. Заметим, что пара $f(E) = \left(f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}) \right)$ является конденсатором в \mathbb{R}^n , ибо f открыто и непрерывно в D , следовательно, множество $f(\overline{B(x_0, r_1)})$ является компактным подмножеством $f(B(x_0, r_2))$. Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (13) очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, так как, в противном случае, в соотношении (13) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ п.в. на (r_1, r_2) . Полагаем $\psi(t) = \begin{cases} 1/[t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)] & , \quad t \in (r_1, r_2) \\ 0 & , \quad t \notin (r_1, r_2) \end{cases}$. Тогда виду теоремы

Фубини

$$\int_A Q(x) \cdot \psi^p(|x - x_0|) dm(x) = \omega_{n-1} I, \quad (14)$$

где, как и прежде, $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$. Заметим, что функция $\eta_1(t) = \psi(t)/I$, $t \in (r_1, r_2)$, удовлетворяет соотношению вида (3), поскольку $\int_{r_1}^{r_2} \eta_1(t) dt = 1$. Поэтому согласно равенству (14) и определению кольцевого (p, Q) -отображения, см. (4),

$$M_p(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta_1^p(|x - x_0|) dm(x) = \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \quad (15)$$

где $S_i = S(x_0, r_i)$. Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ – семейства кривых в смысле обозначений предложения 1, см. также [10, предложение 10.2 гл. II]. По этому предложению

$$\text{cap}_p f(E) = \text{cap}_p \left(f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}) \right) = M_p(\Gamma_{f(E)}). \quad (16)$$

Пусть Γ^* – семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E)}$ с началом в $\overline{B(x_0, r_1)}$. Будем иметь $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и что для достаточно малых $\delta > 0$, $\Gamma_E > \Gamma(S(x_0, r_2 - \delta), S(x_0, r_1), D)$. Следовательно, в виду соотношения (15) и свойству минорирования, $\Gamma_1 > \Gamma_2 \Rightarrow M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$, см. [1, теорема 6.4, разд. 6], получаем $M_p(\Gamma_{f(E)}) \leq M_p(f(\Gamma^*)) \leq M_p(f(\Gamma_E)) \leq$

$$\begin{aligned} &\leq M_p(f(\Gamma(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2 - \delta), A(r_1, r_2 - \delta, x_0)))) \leq \\ &\leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2 - \delta} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{p-1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что функция $\widetilde{\psi}(t) := \psi|_{(r_1, r_2)} = \frac{1}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}$ суммируема на (r_1, r_2) , поскольку по предположению $I \neq \infty$. Отсюда, по абсолютной непрерывности интеграла, получаем, что

$$\int_{r_1}^{r_2 - \delta} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \quad (18)$$

при $\delta \rightarrow 0$. Из (17) и (18) следует, что

$$M_p(\Gamma_{f(E)}) \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{p-1}}. \quad (19)$$

Объединяя (16) и (19), получаем соотношение (13). \square

Замечание 1. Для открытых дискретных кольцевых (p, Q) -отображений $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ интеграл в (12) *всегда конечен* для сколь угодно малых r_1 и произвольном $r_2 > 0$, $r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$. В противном случае из (13) вытекает, что для некоторого $\varepsilon_1 > 0$, $\text{cap}_p f(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}) = 0$, откуда следует, что множество $A := f(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)})$ является всюду разрывным ввиду [12, лемма 2.13] (см. также [10, теорема 1.15, гл. VII]). Однако, ввиду открытости отображения f ,

$$\text{Int } f(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}) \neq \emptyset,$$

что противоречит сделанному выше выводу о нульмерности множества A .

В процессе получения основных результатов заметки мы также нуждаемся в следующей лемме (её доказательство см., напр., [13, лемма 2.2]).

Лемма 2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$. Положим

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}, \quad (20)$$

где I – величина, определённая в (12). Тогда

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} = \int_A Q(x) \cdot \eta_0^p(|x - x_0|) dm(x) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (21)$$

для фиксированной измеримой функции $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $q_{x_0}(r) \neq \infty$ для п.в. $r > 0$, и любой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \quad (22)$$

В частности, из (21) следует, что для кольцевых (p, Q) -отображений в точке x_0 неравенство (13), вообще говоря, не может быть улучшено.

Замечание 2. Из леммы 2 вытекает, что если отображение f удовлетворяет оценке (13), то отображение f также удовлетворяет и неравенству

$$\text{cap}_p f(E) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (23)$$

для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что выполнено условие (4), где E – конденсатор вида $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)} \right)$, $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$, а A – сферическое кольцо с центром в точке x_0 радиусов r_1 и r_2 .

Предположим дополнительно, что $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – гомеоморфизм. Тогда ввиду предложения 1 величина $\text{cap}_p E$ совпадает с левой частью в (3). Таким образом, получаем следующее утверждение: если f – гомеоморфизм, удовлетворяющий условию (13), то f является кольцевым (p, Q) -отображением в области D .

3. Оценка меры образа шара. В этом разделе получена оценка меры образа шара при открытых дискретных кольцевых (p, Q) -отображениях. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М.А. Лаврентьева ([14]). В.И. Кругликовым была получена оценка меры образа шара для отображений квазиконформных в среднем в \mathbb{R}^n (см. [8, лемма 9]). В дальнейшем $q_0(r)$ обозначает $q_{x_0}(r)$ при $x_0 = 0$. Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть $n \geq 2$, $p \geq 1$, $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ – открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение. Предположим, что $q_0(r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, 1)$ и что при некоторой постоянной $c > 0$

$$\int_{r < |x| < 1} Q(x) \psi^p(|x|) dm(x) \leq c \cdot J^\alpha(r), \quad (24)$$

где $\alpha \leq p$ и $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция на $(0, \infty)$ такая, что $0 < J(r) := \int_r^1 \psi(t) dt < \infty$. Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка

$$m(f(B(0, r))) \leq \Omega_n \cdot \left(1 + \beta J^{\frac{p-\alpha}{p-1}}(r) \right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}}, \quad (25)$$

где $\beta = \frac{n-p}{p-1} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c} \right)^{\frac{1}{p-1}}$, а при $p = n$

$$m(f(B(0, r))) \leq \Omega_n \cdot \exp \left\{ -\gamma J^{\frac{n-\alpha}{n-1}}(r) \right\}, \quad (26)$$

где $\gamma = n \left(\frac{\omega_{n-1}}{c} \right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R_t = \{x \in \mathbb{B}^n : t < |x| < t + \Delta t\}$. Пусть $E := (A_{t+\Delta t}, C_t)$ – конденсатор, где $C_t = \overline{B(0, t)}$ и $A_{t+\Delta t} = B(0, t + \Delta t)$. Тогда $f(E) = (f(A_{t+\Delta t}), f(C_t))$ – конденсатор в \mathbb{R}^n . В силу неравенства (9) получим

$$\text{cap}_p(f(A_{t+\Delta t}), f(C_t)) \geq \frac{(\inf m_{n-1} \sigma)^p}{m(f(A_{t+\Delta t}) \setminus f(C_t))^{p-1}}, \quad (27)$$

где $m_{n-1} \sigma$ – $(n-1)$ -мерная мера Лебега C^∞ -многообразия σ , являющегося границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U , содержащего $f(C_t)$ и содержащегося вместе со своим замыканием \overline{U} в $f(A_{t+\Delta t})$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ . С другой стороны, в силу леммы 1 имеем

$$\text{cap}_p(f(A_{t+\Delta t}), f(C_t)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(s)} \right)^{p-1}}. \quad (28)$$

Из неравенств (27) и (28) получим

$$\frac{(\inf m_{n-1} \sigma)^p}{m(f(A_{t+\Delta t}) \setminus f(C_t))^{p-1}} \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(s)} \right)^{p-1}}.$$

Применяя изопериметрическое неравенство $\inf m_{n-1} \sigma \geq n \cdot \Omega_n^{\frac{1}{n}} (m(f(C_t)))^{\frac{n-1}{n}}$, будем иметь

$$n \cdot \Omega_n^{\frac{1}{n}} (m(f(C_t)))^{\frac{n-1}{n}} \leq \omega_{n-1}^{\frac{1}{p}} \left(\frac{m(f(A_{t+\Delta t}) \setminus f(C_t))}{\int_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(s)}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \quad (29)$$

Полагая $\Phi(t) := m(f(B(0, t)))$, из соотношения (29) имеем, что

$$n \cdot \Omega_n^{\frac{1}{n}} \Phi^{\frac{n-1}{n}}(t) \leq \omega_{n-1}^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(s)}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \quad (30)$$

Ввиду замечания 1, $\frac{1}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(s)} \in L_{loc}^1(0, 1)$. Устремляя в неравенстве (30) Δt к нулю, и учитывая монотонное возрастание функции $\Phi(t)$ по $t \in (0, 1)$ и равенство $\omega_{n-1} = n\Omega_n$, для п.в. t имеем существование производной $\Phi'(t)$ и

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}. \quad (31)$$

Рассмотрим неравенство (31) при $1 < p < n$. Интегрируя обе части неравенства по $t \in [r, 1]$ и учитывая, что $\int_r^1 \frac{\Phi'(t)}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} dt \leq \frac{n(p-1)}{p-n} \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1) - \Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r) \right)$ (см., напр., [15, теорема 7.4, гл. IV]), получим

$$\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}} \int_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leq \frac{p-1}{p-n} \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1) - \Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r) \right). \quad (32)$$

Из неравенства (32) получаем, что

$$\Phi(r) \leq \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1) + \Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}} \frac{n-p}{p-1} \int_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}. \quad (33)$$

В (21) полагаем $\eta(t) := \frac{\psi(t)}{J}$, $t \in (r, 1)$, тогда по лемме 2 и из неравенства (24) мы получаем, что

$$\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{p-1}} \leq \int_{r < |x| < 1} Q(x) \cdot \eta^p(|x|) dm(x) \leq c J^{\alpha-p}(r). \quad (34)$$

Наконец, комбинируя (33) и (34) и учитывая, что $m(f(\mathbb{B}^n)) \leq \Omega_n$, приходим к (25).

Осталось рассмотреть случай $p = n$. В этом случае неравенство (31) примет вид:

$$\frac{n}{t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \quad (35)$$

Интегрируя обе части неравенства (35) по $t \in [r, 1]$, учитывая, что $\int_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt \leq \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}$ (см., напр., [15, теорема 7.4, гл. IV]), получим $n \int_r^1 \frac{dt}{t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leq \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}$ и, следовательно, имеем

$$\exp \left\{ n \int_r^1 \frac{dt}{t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\} \leq \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

а потому

$$\Phi(r) \leq \Phi(1) \cdot \exp \left\{ -n \int_r^1 \frac{dt}{t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\}. \quad (36)$$

Аналогично, в (21) полагаем $\eta(t) := \frac{\psi(t)}{J}$, $t \in (r, 1)$, тогда по лемме 2 имеем:

$$\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_r^1 \frac{dt}{t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right)^{n-1}} \leq \int_{r < |x| < 1} Q(x) \cdot \eta^n(|x|) dm(x) \leq c \cdot J^{\alpha-n}(r). \quad (37)$$

Наконец, комбинируя (36) и (37) и учитывая, что $m(f(\mathbb{B}^n)) \leq \Omega_n$, приходим к (26). \square

4. Поведение в точке. Аналог леммы Шварца. Лемма, приведенная в предыдущем разделе, позволяет нам также описать асимптотическое поведение открытых дискретных кольцевых (p, Q) -отображений в начале координат. Всюду далее $D \ni 0 := (0, 0, \dots, 0)$ и, как прежде, $q_0(r)$ обозначает $q_{x_0}(r)$ при $x_0 = 0$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $n \geq 2$, $p \geq 1$, $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ – открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение, $f(0) = 0$. Если $q_0(r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, 1)$ и, кроме того, выполнено соотношение (24), где $\alpha \leq p$ и $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция на $(0, \infty)$, такая что

$$0 < J(r) = \int_r^1 \psi(t) dt < \infty \quad \forall r \in (0, 1), \quad (38)$$

то при $1 < p < n$ имеет место оценка

$$\liminf_{x \rightarrow 0} |f(x)| \cdot \left(1 + \beta J^{\frac{p-\alpha}{p-1}}(|x|)\right)^{\frac{p-1}{n-p}} \leq 1, \quad (39)$$

где $\beta = \frac{n-p}{p-1} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, а при $p = n$

$$\liminf_{x \rightarrow 0} |f(x)| \cdot \exp \left\{ \frac{\gamma}{n} J^{\frac{n-\alpha}{n-1}}(|x|) \right\} \leq 1 \quad (40)$$

и $\gamma = n \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Доказательство. Полагаем $\min_{|x|=r} |f(x)| = l_f(r)$. Покажем, что

$$B(0, l_f(r)) \subset f(B(0, r)) \quad (41)$$

при каждом $r \in (0, 1)$. Предположим противное. Тогда найдутся $r_0 \in (0, 1)$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$, такие, что $y_0 \in B(0, l_f(r_0))$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(B(0, r_0))$, т.е., $y_0 \in B(0, l_f(r_0)) \setminus f(B(0, r_0))$. Заметим, что $B(0, l_f(r_0)) \cap f(B(0, r_0)) \neq \emptyset$, поскольку соотношение $B(0, l_f(r_0)) \not\subset f(B(0, r_0))$, в частности, влечёт, что $l_f(r_0) > 0$ и, кроме того, условие $f(0) = 0$ влечёт, что $0 \in B(0, l_f(r_0)) \cap f(B(0, r_0))$. Заметим также, что шар $B(0, l_f(r_0))$ является связным множеством, при этом, согласно сказанному выше, а также сделанному предположению, $B(0, l_f(r_0)) \cap f(B(0, r_0)) \neq \emptyset \neq B(0, l_f(r_0)) \setminus f(B(0, r_0))$. По [16, теорема 1, гл. 5, § 46] существует элемент $z_0 \in B(0, l_f(r_0)) \cap \partial f(B(0, r_0))$. С другой стороны, согласно свойству открытых отображений

$$\partial f(B(0, r_0)) \subset f(\partial(B(0, r_0))),$$

поэтому найдётся элемент $x_0 \in S(0, r_0)$, такой что $f(x_0) = z_0$. Однако, последнее невозможно, поскольку, в этом случае, $f(x_0) = z_0 \in B(0, l_f(r_0))$, и, значит, $|f(x_0)| < \min_{|x|=r_0} |f(x)|$ при $x_0 \in S(0, r_0)$. Полученное противоречие указывает на то, что предположение о выполнении соотношения $B(0, l_f(r_0)) \not\subset f(B(0, r_0))$ было неверным и, значит, при всех $r \in (0, 1)$, справедливо включение (41).

Из соотношения (41), учитывая условие $f(0) = 0$, имеем $\Omega_n l_f^n(r) \leq m(f(B(0, r)))$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leq \left(\frac{m(f(B(0, r)))}{\Omega_n} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (42)$$

Таким образом, по лемме 3 имеем:

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{\mathcal{R}(|x|)} = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{l_f(r)}{\mathcal{R}(r)} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \left(\frac{m(f(B(0, r)))}{\Omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}(r)} \leq 1,$$

где $\mathcal{R}(r) = \left(1 + \beta J^{\frac{p-\alpha}{p-1}}(r)\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}$ при $1 < p < n$ и $\mathcal{R}(r) = \exp\left\{-\frac{\gamma}{n} J^{\frac{n-\alpha}{n-1}}(r)\right\}$ при $p = n$ (где J определено соотношением (38), а постоянные γ и β соответствуют формулировке леммы 3). Теорема доказана. \square

Из теоремы 2 вытекает следующая

Теорема 3. Пусть $n \geq 2$, $p \geq 1$, $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ – открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение, $f(0) = 0$. Предположим, что $q_0(r) \neq \infty$ для п.в. и

$$\int_{r < |x| < 1} \frac{Q(x)}{|x|^p} dm(x) \leq c \ln \left(\frac{1}{r} \right), \quad \forall r \in (0, r_0), r_0 < 1. \quad (43)$$

Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка

$$\liminf_{x \rightarrow 0} |f(x)| \cdot \left(1 + \beta \ln \left(\frac{1}{|x|} \right)\right)^{\frac{p-1}{n-p}} \leq 1, \quad (44)$$

где $\beta = \frac{n-p}{p-1} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, а при $p = n$

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\gamma_0}} \leq 1 \quad (45)$$

и $\gamma_0 = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Доказательство. Заключение теоремы 3 следует из теоремы 2 при специальном выборе $\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \in (0, 1) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases} \quad \square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим кольцо $A = A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$. Пусть E – конденсатор вида $E = \left(B(0, \varepsilon_2), \overline{B(0, \varepsilon_1)}\right)$. Ввиду леммы 1 и замечания 2 неравенство

$$\text{cap}_p f(E) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (46)$$

будет выполнено для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \eta(r) dr \geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, & t \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases}$$

удовлетворяет последнему условию $\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \eta(r) dr \geq 1$, поэтому, согласно (46) мы получим, что

$$\text{cap}_p \left(f(B(0, \varepsilon_2)), f(\overline{B(0, \varepsilon_1)}) \right) \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int_{A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0)} Q(x) dm(x). \quad (47)$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_p \left(f(B(0, 2\varepsilon)), f(\overline{B(0, \varepsilon)}) \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{A(\varepsilon, 2\varepsilon, 0)} Q(x) dm(x). \quad (48)$$

С другой стороны, в силу неравенства (10) мы имеем оценку:

$$\text{cap}_p \left(f(B(0, \varepsilon_2)), f(\overline{B(0, \varepsilon_1)}) \right) \geq c_1 [m(f(B(0, \varepsilon)))]^{\frac{n-p}{n}}, \quad (49)$$

где c_1 – положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n и заданного числа p . Комбинируя (48) и (49), получаем, что

$$\frac{m(f(B(0, \varepsilon)))}{\Omega_n \varepsilon^n} \leq c_2 \left(\frac{1}{2^n \Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(0, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right)^{\frac{n}{n-p}}, \quad (50)$$

где c_2 – положительная постоянная зависящая только от n и p .

Положим $l_f(\varepsilon) = \min_{|x|=\varepsilon} |f(x)|$. Используя соотношение (42) мы получим, что

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{l_f(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m(f(B(0, \varepsilon)))}{\Omega_n \varepsilon^n} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (51)$$

Наконец, комбинируя (50) и (51), имеем:

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq c_0 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2^n \Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(0, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right)^{\frac{1}{n-p}}.$$

Теорема доказана. \square

5. Логарифмическая гёльдеровость открытых дискретных (p, Q) -отображений. Аналог теоремы Миньевич. В начале статьи мы уже обращали внимание на то, что в случае ограниченных Q для открытых дискретных (p, Q) -отображений справедливы оценки вида (6). Как нами было обнаружено, некий аналогичный результат, отличных от вышеприведенных, справедлив также и при неограниченных Q с «допустимым ростом». (По этому поводу см. также весьма существенный в этом направлении результат Р. Миньевич о необходимых и достаточных условиях равностепенной непрерывности отображений с ограниченным искажением [17]). Отметим, что в случае неконформного модуля $p \in (n-1, n)$ равностепенная непрерывность соответствующего класса отображений имеет место a priori (см. [18]), так что необходимые и достаточные

условия равностепенной непрерывности, в этом случае, «вырождаются» в необходимые условия, что находит своё отражение в следующем утверждении.

Лемма 4. Пусть $n \geq 2$, $n - 1 < p < n$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, найдутся числа $q < p$, $\varepsilon_0 \in (0, \text{dist}(x_0, \partial D))$, $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$ и неотрицательная измеримая по Лебегу функция $\psi : (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, такие что

$$\int_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^p(|x - x_0|) dm(x) \leq K \cdot I^q(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0), \quad (52)$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определено соотношением $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда найдутся постоянные $r_0 > 0$ и $N > 0$, зависящие только от ψ, n, x_0, K, p и q такие, что для всех $x \in B(x_0, r_0)$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(x_0)| \leq N \cdot I^{\frac{(q-p)(n-1)}{p}}(|x - x_0|, \varepsilon_0).$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (23). Выберем в этом неравенстве в качестве $\eta(t) = \psi(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Тогда используя условие (52) мы получим, что для конденсатора $E = \left(B(x_0, \varepsilon_0), \overline{B(x_0, \varepsilon)}\right)$ справедливо неравенство

$$\text{cap}_p f(E) \leq K \cdot I^{q-p}(\varepsilon, \varepsilon_0). \quad (53)$$

Поскольку по условию $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, из соотношения (53) вытекает, что $\text{cap}_p f(E) \leq \alpha(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, где $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ввиду соотношения (10) мы получим, что

$$\alpha(\varepsilon) \geq \text{cap}_p f(E) \geq n \Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} [m(f(C))]^{\frac{n-p}{n}},$$

где $C := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$. Из последнего соотношения мы получим, что $m(f(C)) \leq \alpha_1(\varepsilon)$, где $\alpha_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая последнее неравенство, выберем $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon'_0$, так что

$$m(f(C_1)) \leq 1, \quad (54)$$

где $C_1 := \overline{B(x_0, \varepsilon_1)}$. Рассмотрим теперь конденсатор $\mathcal{E} = \left(B(0, \varepsilon_1), \overline{B(x_0, \varepsilon)}\right)$, $\varepsilon < \varepsilon_1$. Тогда снова воспользуемся неравенством (23), выбрав в этом неравенстве в качестве $\eta(t) = \psi(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $t \in (\varepsilon, \varepsilon'_1)$, $\varepsilon'_1 < \varepsilon_1$. Тогда используя условие (52) мы получим, что для конденсатора \mathcal{E} справедливо неравенство

$$\text{cap}_p f(\mathcal{E}) \leq \alpha_2(\varepsilon) \quad (55)$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon'')$, где $\alpha_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Воспользуемся теперь оценкой ёмкости конденсатора через меру и диаметр:

$$\text{cap}_p E = \text{cap}_p (A, C) \geq \left(c_1 \frac{(d(C))^p}{(m(A))^{1-n+p}} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad p > n - 1, \quad (56)$$

где c_1 зависит только от n и p , а $d(C)$ обозначает диаметр множества C (см. [8, предложение 6]). Согласно этой оценке и неравенству (55)

$$\left(c_1 \frac{(d(f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})))^p}{(m(f(B(x_0, \varepsilon_1))))^{1-n+p}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \text{cap}_p f(\mathcal{E}) \leq \alpha_2(\varepsilon).$$

Учитывая теперь неравенство (54), из последнего соотношения получаем, что

$$d(f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})) \leq \alpha_3(\varepsilon), \quad (57)$$

где $\alpha_3(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим теперь отображение $\tilde{f}(x) := f(x) - f(x_0)$. Тогда $d(f(\overline{B(x_0, \varepsilon)})) = d(\tilde{f}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}))$, $\text{cap}_p f(E) = \text{cap}_p \tilde{f}(E)$ и \tilde{f} , как и f , является открытым дискретным (p, Q) -отображением в точке x_0 . В таком случае, из (57) вытекает, что для некоторого $r_1 > 0$ (зависящего только от ψ, n, x_0, K, p и q) выполнено

$$|\tilde{f}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in B(x_0, r_1). \quad (58)$$

Рассмотрим теперь конденсатор $E = \left(B(0, r_2), \overline{B(x_0, \varepsilon)} \right)$, где $0 < \varepsilon < r_2 < r_1$. Полагая $A := B(0, r_2)$ и $C := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, учитывая неравенство (58) (т.е., что $\tilde{f}(A) \subset \mathbb{B}^n$), применяя неравенство (56) к отображению \tilde{f} , мы получим, что

$$\text{cap}_p f(E) \geq \left(c_1 \frac{(d(f(C)))^p}{(m(\tilde{f}(A)))^{1-n+p}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \geq \left(c_1 \frac{(d(f(C)))^p}{\Omega_n^{1-n+p}} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (59)$$

Из (59) и (53) мы получим, что для некоторой постоянной $M > 0$ и при $\varepsilon < r_3$ (зависящего только от ψ, n, x_0, K, p и q)

$$d(f(C)) \leq N \cdot I^{\frac{(q-p)(n-1)}{p}}(\varepsilon, \varepsilon_0). \quad (60)$$

Зафиксируем теперь $x \in D$ так, что $|x - x_0| = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < r_3$. Тогда $x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $f(x) \in f(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = f(C)$ и из (60) вытекает, что для всех $x \in B(x_0, r_3)$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq N \cdot I^{\frac{(q-p)(n-1)}{p}}(|x - x_0|, \varepsilon_0). \quad (61)$$

Лемма доказана.

Следующее определение может быть найдено напр., в [19, разд. 6.1]. Будем говорить, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO$ в x_0 , если $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty$, где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$.

Приводимое ниже утверждение более явно указывает на функции, при которых выполнено утверждение леммы 4.

Предложение 2. Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$, такая, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \rightarrow \infty$ при

$\varepsilon \rightarrow 0$ и некотором $\varepsilon_1 < \text{dist}(x_0, \partial D)$ (где $I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_1) < \infty$ при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$). Тогда можно указать $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и функцию $\psi(t) > 0$ такие, что в точке x_0 выполнено условие (52) леммы 4.

Доказательство. Пусть $Q \in FMO(x_0)$; не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть $\varepsilon_0 < \min\{\text{dist}(0, \partial D), e^{-1}\}$. На основании [19, следствие 6.3] для функции $0 < \psi(t) = \frac{1}{(t \log \frac{1}{t})^{n/p}}$ будем иметь, что $\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^p(|x|) dm(x) = \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} \frac{Q(x) dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} = O(\log \log \frac{1}{\varepsilon})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим также, что при указанных выше ε выполнено $\psi(t) \geq \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$, поэтому $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt \geq \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}$. Тогда соотношение (52) выполнено при $q = 1$ и, таким образом, утверждение предложения 2 в случае $Q \in FMO$ доказано.

Пусть теперь $I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и некотором $\varepsilon_1 < \text{dist}(x_0, \partial D)$ (где $I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_1) < \infty$ при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$). Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)] , & t \in (\varepsilon, \varepsilon_1) , \\ 0 , & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_1) , \end{cases}$$

Тогда ввиду соотношения (14) неравенство (52) также выполнено при $q = 1$. Предложение 2 полностью доказано. \square

Из леммы 4 и предложения 2 (с учётом замечания 1 в случае теоремы 5) немедленно вытекают следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть $n \geq 2$, $n - 1 < p < n$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что $Q \in FMO(x_0)$, тогда найдётся $r_0 > 0$ и постоянная $M > 0$, зависящие только от n, p, x_0 и функции Q такие, что для всех $x \in B(x_0, r_0)$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot (\log \log(1/|x - x_0|))^{\frac{(1-p)(n-1)}{p}} . \quad (62)$$

В частности, соотношение (62) выполнено, если функция Q просто ограничена. Кроме того, из оценки (62) вытекает равностепенная непрерывность семейства всех указанных отображений f .

Теорема 5. Пусть $n \geq 2$, $n - 1 < p < n$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что $I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и некотором $\varepsilon_1 < \text{dist}(x_0, \partial D)$. Тогда найдётся $r_0 > 0$ и постоянная $M > 0$, зависящие только от n, p, x_0 и функции Q такие, что для всех $x \in B(x_0, r_0)$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot \left(\int_{|x-x_0|}^{\varepsilon_1} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \right)^{\frac{(1-p)(n-1)}{p}} . \quad (63)$$

Кроме того, из оценки (63) вытекает равностепенная непрерывность семейства всех указанных отображений f .

Список литературы

- [1] Väisälä J. Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [2] Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q) -distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – **59**, no. 2. – P. 217–231.
- [3] Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича–Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 50–102.
- [4] Gehring F. Lipschitz mappings and p – capacity of rings in n – space // Ann. of Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175–193.
- [5] Ikoma K. On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175–203.
- [6] Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448**. – P. 1–40.
- [7] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения. – Москва: Наука, 1983.
- [8] Кругликов В.И. Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185–206.
- [9] Мазья В.Г. Пространства Соболева. – Ленинград: Издательство ленинградского университета, 1985.
- [10] Rickman S. Quasiregular mappings. – Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [11] Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. Аналогии леммы Икома–Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1368–1380.
- [12] Martio O., Rickman S. and Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465**. – P. 1–13.
- [13] Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара // Сиб. матем. журн. – 2012. – **53**, № 4. – P. 920–930.
- [14] Лаврентьев М.А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1962.

- [15] *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
- [16] *Кураатовский К.* Топология: т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
- [17] *Miniowitz R.* Normal families of quasimeromorphic mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – **84**, по. 1. – Р. 35–43.
- [18] *Golberg A., Salimov R. and Sevost'yanov E.* Normal families of discrete open mappings with controlled p -module // Contemporary Math. (accepted for publication).
- [19] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics. – New York etc.: Springer, 2009.

Руслан Радикович Салимов

Институт математики НАН Украины

ул. Терещенковская, д. 3

г. Киев-4, Украина, 01 601

тел. +38 095 630 85 92 (моб.), e-mail: ruslan623@yandex.ru

Евгений Александрович Севостьянов

Житомирский государственный университет им. И. Франко

ул. Большая Бердичевская, 40

г. Житомир, Украина, 10 008

тел. +38 066 959 50 34 (моб.), e-mail: esevostyanov2009@mail.ru